

## Задача № 4 для 11 классов

Прежде всего хочется сделать одно теоретическое отступление (оно, может быть, не в рамках школьной программы, но не очень сложное). Пусть есть некоторое уединенное заряженное тело с зарядом  $q_1$ . Тогда у этого тела есть потенциал  $\varphi_1$ , причем  $q_1 = C_1 \times \varphi_1$ , где  $C_1$  – ёмкость этого тела. Это же равенство можно записать по-другому:  $\varphi_1 = a_1 \times q_1$ . В этом случае коэффициент  $a_1 = \frac{1}{C_1}$  носит название потенциальный коэффициент. Он как и ёмкость зависит от размеров и формы тела, а также электрических свойств окружающей среды.

Пусть теперь рядом с первым телом поместим другое заряженное тело с зарядом  $q_2$  (то есть, получился конденсатор). Тогда потенциал первого тела изменится. Причем, по принципу суперпозиции вклад в новый потенциал должны давать оба заряда:  $\varphi_1 = a_1 q_1 + a_0 q_2$ , где  $a_0$  – потенциальный коэффициент, учитывающий вклад второго тела. Соответственно, для потенциала второго тела:  $\varphi_2 = a_2 q_2 + a_0 q_1$ . В общем случае,  $a_1 \neq a_2$ , но  $a_0$  – одинаковые (я не буду это доказывать – просто поверьте).

Перейдем к задаче. Пусть на втором теле находится заряд  $q$  (заряд на первом теле и начальное напряжение на конденсаторе не имеют значения!!! – лишь бы напряжение не равнялось нулю.) Кстати, в условии задачи не сказано, что конденсатор плоский! Он может быть любым.

1. Первое же тело соединяем с Землей. Потенциал Земли примем равным нулю, следовательно и потенциал любого тела, соединенного с Землей будет ноль. Для первого тела:  $\varphi_1 = a_1 q_1 + a_0 q = 0$ . Значит,  $q_1 = -q \frac{a_0}{a_1}$  – индуцированный (пришедший с Земли) заряд на первом теле. Тогда

$$U_1 = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_2 = a_2 q + a_0 q_1 = a_2 q - a_0 q \frac{a_0}{a_1} = q a_2 \left(1 - \frac{a_0^2}{a_1 a_2}\right).$$

При этом, после отсоединения от Земли ничего не изменится.

2. Соединяем с Землей второе тело. Тогда  $\varphi_2 = a_2 q_2 + a_0 q_1 = 0$ . Значит,  $q_2 = -q_1 \frac{a_0}{a_2} = q \frac{a_0^2}{a_1 a_2}$  – новый заряд на втором теле. Следовательно,

$$U_2 = \varphi_2 - \varphi_1 = -\varphi_1 = -(a_1 q_1 + a_0 q_2) = a_1 q \frac{a_0}{a_1} - a_0 q \frac{a_0^2}{a_1 a_2} = q a_0 \left(1 - \frac{a_0^2}{a_1 a_2}\right).$$

3. Опять соединяем первое.  $\varphi_1 = a_1 q'_1 + a_0 q_2 = 0$ , значит:  $q'_1 = -q_2 \frac{a_0}{a_1} = -q \frac{a_0^3}{a_1 a_2}$  – новый заряд на первом теле. Следовательно,  $U_3 = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_2 = a_2 q_2 + a_0 q'_1 = a_2 q \frac{a_0^2}{a_1 a_2} - a_0 q \frac{a_0^3}{a_1 a_2} = q \frac{a_0^2}{a_1} \left(1 - \frac{a_0^2}{a_1 a_2}\right)$ .

4. Следующее соединение – второе тело с Землей. Тогда:  $\varphi_2 = a_2 q'_2 + a_0 q'_1 = 0$ ,  $q'_2 = -q'_1 \frac{a_0}{a_2} = q \frac{a_0^4}{a_1 a_2^2}$  – опять же новый заряд на втором теле. Значит:

$$U_4 = \varphi_2 - \varphi_1 = -\varphi_1 = -(a_1 q'_1 + a_0 q'_2) = a_1 q \frac{a_0^3}{a_1 a_2} - a_0 q \frac{a_0^4}{a_1 a_2^2} = q \frac{a_0^3}{a_1 a_2} \left(1 - \frac{a_0^2}{a_1 a_2}\right).$$

Можно продолжать дальше, но, думаю, хватит – уже можно составить зависимость напряжений. Если начальное напряжение  $U_0$ , то:

$$U_1 = k_1 U_0$$

$$U_2 = U_1 \frac{a_0}{a_2} = k_1 U_0 \frac{a_0}{a_2}$$

$$U_3 = U_2 \frac{a_0}{a_1} = k_1 U_0 \frac{a_0^2}{a_1 a_2}$$

$$U_4 = U_3 \frac{a_0}{a_2} = k_1 U_0 \frac{a_0^3}{a_1 a_2^2}$$

...

$$U_7 = k_1 U_0 \frac{a_0^6}{a_1^3 a_2^3}$$

Легко увидеть, что  $k_3 = k_1 \frac{a_0^2}{a_1 a_2}$ ,  $k_7 = k_1 \frac{a_0^6}{a_1^3 a_2^3}$ , значит  $k_7 = k_1 \left( \frac{k_3}{k_1} \right)^3 = \frac{k_3^3}{k_1^2}$ .

Следовательно:  $k_1 = \sqrt{\frac{k_3^3}{k_7}}$ .