1. Обозначим t_0 – точное время в пути (по часам Степашки), t_x = 2 час – время в пути по часам Хрюши, t_m = 2.5 час – время в пути по часам Мишутки, $\alpha_x = -1/6$ – “точность” часов Хрюши и α_m – искомую точность часов Мишутки. Тогда имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_x = \dfrac{t_x - t_0}{t_0}, \quad \alpha_m = \dfrac{t_m - t_0}{t_0}, \end{cases}$$

решение которой: $t_0 = t_x/(1+\alpha_x) = 2.4 час,\ \alpha_m = (1+\alpha_x)\, t_m / t_x - 1 = 1/24 = 2.5 мин/1 час$.

Ответ: Часы Мишутки уходят вперед на 2.5 минуты за один час.

<u>Примечание:</u> Зная точную скорость и точное время, можно дополнительно найти пройденное расстояние: $S = V t_0 = 120 км$.

2. Обозначим $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ и $\vec{V}$ – скорости соответственно Димы, Коли, Джоджа и Миши относительно земли. Вектора $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ задают в пространстве ортогональную систему координат $(x; y; z)$. Для относительных скоростей Миши $\vec{U}_i$ имеем три уравнения $\vec{U}_i = \vec{V} - \vec{V}_i$, i=1,2,3 (формула сложения скоростей). Возведя каждое из уравнений в квадрат и обозначая проекции скорости $\vec{V}$ на направления $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ как V_x, V_y, V_z, получим систему 4-х уравнений относительно неизвестных V_x, V_y, V_z, V :

$$\begin{cases} V^2 - 2V_1 V_x = U_1^2 - V_1^2 \\ V^2 - 2V_2 V_y = U_2^2 - V_2^2 \\ V^2 - 2V_2 V_z = U_3^2 - V_3^2 \\ V^2 - V_x^2 - V_y^2 - V_z^2 = 0 \end{cases}$$

Эту систему можно решить в общем виде, но это слишком громоздко. Поэтому подставим значения для известных скоростей $V_1 = 9, V_2 = 16, V_3 = 1, U_1 = 15, U_2 = 20, U_3 = 13$ м/с:

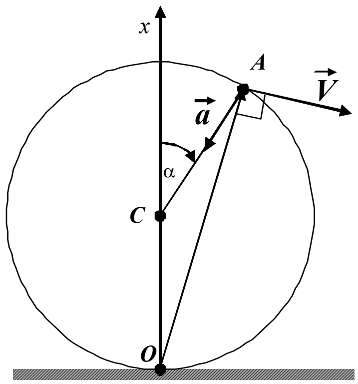
$$\begin{cases} V^2 - 18V_x = 144 \\ V^2 - 32V_y = 144 \\ V^2 - \ \ 2V_z = 168 \\ V^2 - V_x^2 - V_y^2 - V_z^2 = 0 \end{cases}$$

Решаем систему, и получаем два ответа:

Ответ: $\vec{V} = \{0;\ 0; -12\}$ и $|\vec{V}| = 12\, м/с.$;

$\vec{V} = \{4608/1621;\ 2592/1621;\ 22020/1621\} \approx \{2.84; 1.60;\ 13.58\}$ и $|\vec{V}| = 156\sqrt{13/1621} \approx 13.97\, м/с.$

3. Предполагаем, что центр колеса движется с *постоянной* скоростью $\vec{V}_c$. В этом случае



ускорение точки ***A*** относительно земли равно ее ускорению относительно любой инерциальной СО, в частности, подвижной инерциальной СО, связанной с осью колеса. Но в этой СО колесо совершает чисто вращательное движение вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ($w = V_c / R$), и значит ускорения всех точек обода колеса направлены к центру колеса ($a = w^2 \cdot R$). Точка ***O*** является мгновенным центром вращения (движение без проскальзывания), поэтому вектор скорости точки ***A*** перпендикулярен радиус вектору $\vec{OA}$ ($V = w \cdot OA$).
Т.о. легко получить (см. рис.)
Ответ: Искомый угол равен $\beta = (\pi + \alpha)/2$, $(-\pi < \alpha < \pi)$

<u>*Примечание:*</u> В общем случае (движение с ускорением) ответ не будет таким простым – он зависит не только от α, но и от мгновенных значений скорости и ускорения оси колеса.

4. Поскольку один брусок покоится, а другой движется с постоянной скоростью, и коэффициенты трения брусков о плоскость одинаковы, то выполняется соотношение $\mu = \operatorname{tg}\alpha$.
Запишем законы сохранения импульса и энергии и найдем скорости брусков после удара:

$$\begin{cases} mu_m + Mu_M = MV \\ mu_m^2 + Mu_M^2 = MV^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M(V - u_M) = mu_m \\ M(V^2 - u_M^2) = mu_m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M(V - u_M) = mu_m \\ u_m(V + u_M - u_m) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_m = \dfrac{2}{1+\kappa} V \\ u_M = \dfrac{1-\kappa}{1+\kappa} V \end{cases},$$

где через u_m и u_M обозначены соответственно проекции скоростей брусков m и M на направление $\vec{V}$, а $\kappa = m/M$ – отношение масс брусков.
Теперь надо различать два случая:

1) <u>$\kappa = m/M \le 1$</u>

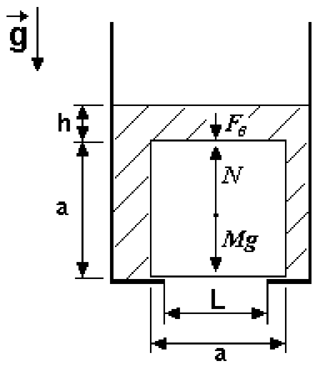
   В этом случае скорости брусков будут постоянными и *не отрицательными*, и расстояние между ними будет увеличиваться по линейному закону:
   $S(t) = (u_m - u_M) \cdot t = V \cdot t$

2) <u>$\kappa = m/M > 1$</u>

   В этом случае нижний брусок будет двигаться с постоянной скоростью вниз, а верхний брусок начнет двигаться вверх равнозамедленно с ускорением $a_M = 2g\sin\alpha$ до полной остановки, а затем будет находиться в покое. Время до остановки равно $t_1 = -u_M / a_M$.
   Т.о., расстояние между брусками будет изменяться по квадратичному закону $S(t) = V \cdot t - \dfrac{a_M t^2}{2}$ на временном интервале $0 \le t \le t_1$, а при $t > t_1$ расстояние будет расти по линейному закону: $S(t) = S_1 + u_m(t - t_1)$, где $S_1 = V \cdot t_1 - \dfrac{a_M t_1^2}{2}$ – расстояние между брусками в момент остановки верхнего бруска.

Ответ: см. выше.

5. По-видимому, сосуд все-таки вертикальный, а не горизонтальный.
Кубик находится в равновесии под действим вертикальных сил: силы тяжести $M\vec{g}$, силы нормальной реакции дна сосуда $\vec{N}$, и, дополнительно, силы давления столба воды на верхнюю грань кубика $\vec{F}_в = \rho h a^2 \vec{g}$ в том случае, если воды достаточно, чтобы покрыть кубик (см. рис.). Считаем, что силы давления атмосферы на нижнюю и верхнюю грань кубика уравновешивают друг друга. В горизонтальном направлении кубик находится в равновесии под действием сил давления воды на вертикальные стенки.



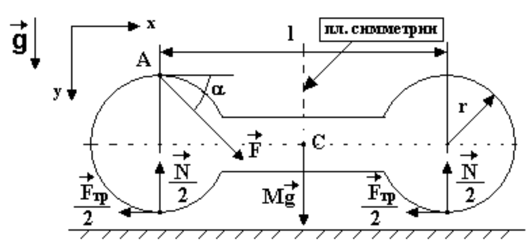
Таким образом выписываем ответ:

$$N = \begin{cases} Mg, & \text{если}\, V \le a(S - a^2) \\ Mg\{1 + \dfrac{\rho a^2}{MS}[V - a(S - a^2)]\}, & \text{если } V > a(S - a^2) \end{cases}.$$

Кубик опирается на дно сосуда по площади $a^2 - L^2$ (независимо от того, как ориентирован кубик относительно отверстия), поэтому искомое *среднее* давление на дно сосуда вычисляется как

Ответ: $p = N/(a^2 - L^2)$ – значение N смотри выше.

6. Слова "*равномерно толкают*" по-видимому означают следующее: сила стремится сдвинуть гантель вправо (*толкают*), и если гантель движется, то скорость – постоянна (*равномерно*). На гантель действуют следующие силы: сила $\vec{F}$, с которой толкают; сила тяжести гантели $M\vec{g}$, сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$ (см.рис). Последняя может быть силой трения покоя, если гантель не движется, либо силой трения скольжения, если гантель движется.



Независимо от того, покоится гантель или движется равномерно, система отсчета гантели является инерциальной. Перейдем в эту СО. В этой СО гантель покоится, а значит выполняются законы статики: сумма всех сил равна нулю: $F_x = F_{тр}$; $N = Mg + F_y$, и сумма моментов сил относительно любой точки равна нулю. Предполагая, что центр тяжести лежит в вертикальной геометрической плоскости симметрии гантели, запишем сумму моментов сил относительно ц.т. гантели:

$$F_x \cdot 2r - F_y \cdot l/2 = 0 \ .$$

Момент силы $\vec{N}$ равен нулю, поскольку $\vec{N}$ лежит в той же плоскости симметрии, что и ц.т. гантели (следует из условия задачи: оба шара действуют на плоскость с одинаковой силой). Таким образом получаем

Ответ: $\mathrm{tg}\,\alpha = F_y / F_x = 4r/l$.

Замечания:

1) Ответ не зависит от того, покоится гантель или движется. Однако равномерное движение возможно при определенных условиях. Как легко получить, F должна быть равна:

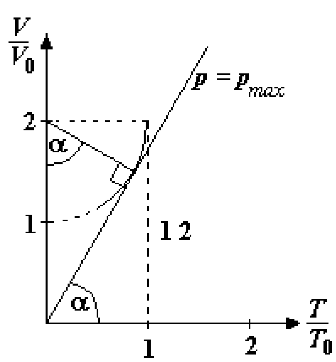
$F = \dfrac{\mu Mg}{1-\mu \operatorname{tg}\alpha}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$. При этом дополнительно надо потребовать выполнение условия $(1-\mu \operatorname{tg}\alpha) > 0 \Rightarrow \mu < l/4r$.

Если же $\mu \geq l/4r$, то гантель не может быть сдвинута никакой по величине силой.

2) Если гантель неоднородна, так что ц.т. по горизонтали отстоит от т.А на расстояние $l/2-\delta$, то ответ будет следующим:

$\operatorname{tg}\alpha = F_y / F_x = \dfrac{4r}{l}\dfrac{1-\delta/(2\mu r)}{1-2\delta/l}$, и движение может происходить при выполнении того же условия $\mu < l/4r$.

7. Переписав уравнение К.-М. в виде $\dfrac{V}{V_0} = \left(\dfrac{\nu R T_0}{p V_0}\right)\dfrac{T}{T_0}$, видим, что в координатах $\left\{\dfrac{T}{T_0};\dfrac{V}{V_0}\right\}$



изобары являются прямыми линиями, проходящими через начало координат. Максимальное давление в процессе соответствует изобаре с минимально возможным углом наклона. А это – линия, касательная к графику процесса (см. рис.). Как легко видеть, угол наклона касательной равен $\alpha = 60^\circ$. Т.о.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\nu R T_0}{p_{\max} V_0} \Rightarrow$$

$$p_{\max} = \frac{\nu R T_0}{V_0 \operatorname{tg}\alpha} = \frac{10г \cdot 8.31 Дж/(моль \cdot К) \cdot 300 К}{29 г/моль \cdot 10^{-3} м^3 \cdot \sqrt{3}} \approx 5\, атм.$$

Ответ: $p_{\max} = \dfrac{m R T_0}{\mu V_0 \operatorname{tg} 60^\circ} \approx 5\, атм.$

8. На рис. 8-1а изображено начальное состояние системы. Поршень находится в равновесии под действием силы давления газа p_0 и силы давления

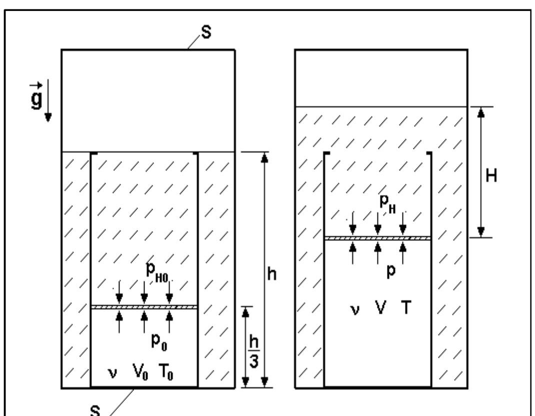


Рис. 8-1а Рис. 8-1б

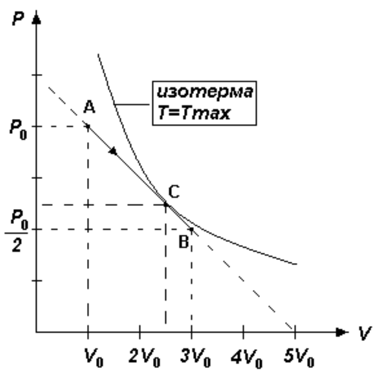
p_{H0} водяного столба высоты $H_0 = \dfrac{2}{3}h$. Т.о. имеем:

$p_0 = p_{H0} = \rho g H_0$, $V_0 = \dfrac{S}{2}\cdot\dfrac{h}{3} = \dfrac{S}{4}H_0$, и $T_0 = \dfrac{p_0 V_0}{\nu R}$.

Пусть объем газа стал равным V (рис.8-1б). Тогда поршень вытеснил во внешний сосуд объем воды $V - V_0$, и высота водяного столба над поршнем стала равной

$$H = H_0 - \frac{V-V_0}{S/2} + \frac{V-V_0}{S} = H_0 - \frac{V-V_0}{S} = H_0\frac{5V_0 - V}{4V_0}.$$

Соответственно, гидростатическое давление стало равно $p_H = \rho g H_0 \dfrac{5V_0 - V}{4V_0} = p_0 \dfrac{5V_0 - V}{4V_0}$. По условию, процесс расширения медленный, т.е. *квазистатический* , а это означает, что давление газа в каждый момент равно давлению водяного столба, $p = p_H$. Кроме того, можно воспользоваться уравнением К.-М. для получения зависимости температуры газа от его объема: $T = \dfrac{pV}{\nu R} = \dfrac{p_0 V(5V_0 - V)}{4\nu R V_0} = \dfrac{p_0 V_0}{4\nu R}\dfrac{V}{V_0}\left(5 - \dfrac{V}{V_0}\right) = \dfrac{1}{4}T_0\dfrac{V}{V_0}\left(5 - \dfrac{V}{V_0}\right)$. Зависимость –



параболическая, достигающая максимума при $\dfrac{V}{V_0} = \dfrac{5}{2}$.

Максимальная температура в процессе: $T_{\max} = \dfrac{25}{16}T_0$. Видимо, это то значение *минимальной* температуры, о которой спрашивают авторы задачи. $T_{\max}$ достигается в точке C касания изотермы прямой $p = p(V)$, см. рис.8-2.

Ответ: $T_{\max} = \dfrac{25}{16}T_0 = \dfrac{25}{144}\dfrac{\rho g h^2 S}{\nu R}$.

9. По первому закону термодинамики $\Delta U = c_v \nu \Delta T = Q + A$, где $A = 60$ *Дж* – совершенная работа над порцией газа, Q – количество тепла, полученное газом в процессе сжатия, ΔU – изменение внутренней энергии газа, $\Delta T = 40$ *К* – изменение температуры газа при сжатии.

По определению, *средняя* теплоемкость порции газа (не молярная!) равна $C = \dfrac{Q}{\Delta T} = c_v \nu - \dfrac{A}{\Delta T}$

Количество молей в порции воздуха объемом $V = 0.55$ *л* найдем из уравнения К.-М.: $\nu = \dfrac{p_0 V}{R T_0}$, где $p_0 = 101325$ *Па* и $T_0 = 273.15$ *К* – давление и температура при нормальных условиях. Т.о.

Ответ: $C = c_v \dfrac{p_0 V}{R T_0} - \dfrac{A}{\Delta T} = \dfrac{2.5R \cdot 10^5\,Па \cdot 0.55 \cdot 10^{-3}\,м^3}{R \cdot 273К} - \dfrac{60Дж}{40К} \approx -1.0\,Дж/К$.

<u>*Примечание:*</u> Как и следовало ожидать, теплоемкость газа в процессе сжатия отрицательна, т.е. газ отдает тепло во внешнюю среду (вспомните нагревание стенок насоса при накачке шин).