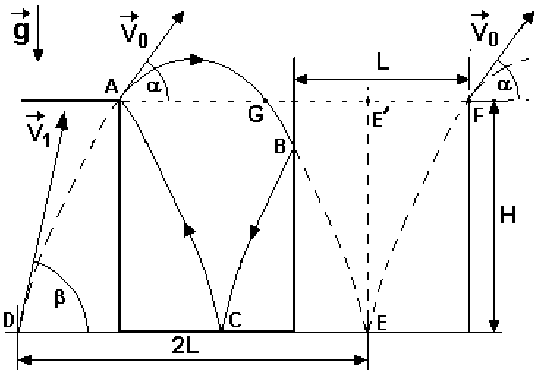
Это – мои наброски решений задач ПВГ для 11-го класса. Оформление не соответствует требованиям, опубликованным на сайте проекта. Моя цель – просто как можно быстрее получить ответ (желательно правильный ☺), с формулировкой основных идей без разжевывания многих очевидных вещей.

1. Начнем рассмотрение с двойного удара, причем будем искать решение для случая, когда **первое** соударение – о **вертикальную** стенку, а **второе** – о **дно** желоба. Т.е., это траектория вида A-B-C-A



на рис.1. Заметим, что если мы нашли такую траекторию, то решением задачи будет и траектория в обратном направлении, т.е. A-C-B-A. (не надо отдельно рассматривать случай первого соударения с дном – в 2 раза меньше работы!).

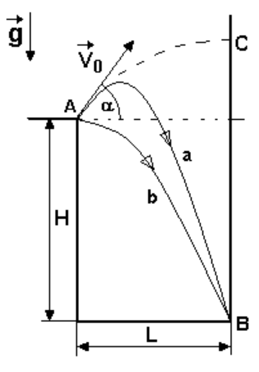
При упругом ударе мячик отскакивает по закону зеркального отражения. Это позволяет нам использовать так называемый метод развертки, суть которого ясна из рисунка. Вместо поиска траектории A-B-C-A задача сводится к поиску траектории A-B-E-F в щели шириной $2L$ с одной точкой удара о дно (т.E), или к поиску траектории D-A-G-B-E – бросание тела с горизонтальной поверхности на расстояние $2L$ – вообще нет удара.

Т.о. решаем задачу:

найти угол β, под которым надо бросить мяч из т. D горизонтальной плоскости со скоростью $V_1 = V_0\sqrt{1+\frac{2gH}{V_0^2}} = \sqrt{5}V_0$, чтобы дальность полета была $2L$, а высота подъема была бы больше H.

Имеем : $2L = \frac{V_1^2}{g}\sin 2\beta \Rightarrow \sin 2\beta = \frac{2gL}{V_1^2} = \frac{3}{5}$. Уравнение имеет два решения: одно для высокой траектории ($\sin\beta = \frac{3}{\sqrt{10}};\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$) и второе – для низкой: ($\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}};\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$). Легко проверить, что подходит только первое решение.

Ну а теперь: $\cos\alpha = \frac{V_1}{V_0}\cos\beta = \sqrt{5}\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.



Теперь рассмотрим **одно** соударение. Здесь возможны 2 случая:

- мячик ударяется о вертикальную стенку перпендикулярно, т.е. точка удара – вершина параболической траектории (см. на рис. пунктирную траекторию A-C). Однако, в данной задаче такого решения нет. Действительно, вершина параболы отстоит от т.А по горизонтали не далее, чем на $l_{\max} = \frac{V_0^2}{2g} = 0.1\,м$ (бросок под углом 45 градусов), что меньше расстояния до вертикальной стенки L=0.3 *м*.
- Случай одновременного соударения с дном и стенкой, т.е. удар в угол (т.В на рис). Здесь, конечно, тяжелый случай. Скорость отскока будет равна по величине скорости подлета (по З.С.Э.). А что можно сказать об изменении направления вектора скорости после удара? Надо решать задачу о процессе упругого взаимодействия шара с углом. Кто-нибудь рассматривал такую задачу? Возможно,

бильярдисты могли бы подсказать ответ (если играли на бильярдном столу без луз)? Но решение, при котором вектор скорости отскока противоположен вектору скорости подлета, кажется разумным. По крайней мере, если размеры области стенки, участвующей во взаимодействии с шаром, много меньше радиуса шара, то взаимодействия по горизонтали и вертикали будут независимыми, и значит, наше предположение проходит. В этом случае решениями являются траектории А-а-В-а-А и А-б-В-б-А (см. рис.). Найдем их. Из основных уравнений движения (t – время полета от т.А до т.В) получаем уравнение относительно тангенса искомого угла α :

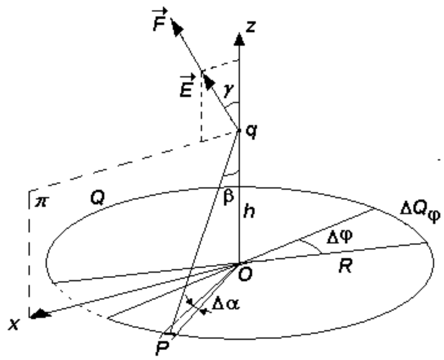
$$\begin{cases} -H = V_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2} \\ L = V_0 \cos\alpha \cdot t \end{cases} \Rightarrow \mathrm{tg}^2\,\alpha - \frac{2V_0^2}{gL}\mathrm{tg}\,\alpha + (1 - \frac{2V_0^2 H}{gL^2}) = 0 .$$

Чтобы не мучиться, подставим числовые данные и получим решение квадратного уравнения: $(\mathrm{tg}\,\alpha)_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{11}}{3}$. Откуда $\alpha_{1,2} \approx \{60.6^\circ; -23.7^\circ\}$.

Таким образом

Ответ: $\alpha = \pm 45^\circ$ и, возможно, $\alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{2 \pm \sqrt{11}}{3} \approx \{60.6^\circ; -23.7^\circ\}$

3. Сила, действующая на точечный заряд q, равна $\vec{F} = q\vec{E}$, где $\vec{E}$ – напряженность электрического поля кольца с вырезом в месте расположения точечного заряда. Найдем $\vec{E}$. Из симметрии задачи следует, что вектор напряженности лежит в плоскости симметрии кольца Oxz (см. рис). Найдем вначале составляющую E_z. Малый элемент дуги кольца, задаваемый угловым размером $\Delta\alpha$, несет на себе заряд $\Delta Q = \dfrac{Q}{2\pi}\Delta\alpha$, который дает следующий вклад в E_z:



$$\Delta E_z = k\frac{\Delta Q}{R^2+h^2}\cos\beta = k\frac{h\Delta Q}{(R^2+h^2)^{3/2}},$$

где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. Суммируя по кольцу, получаем результат:

$E_z = k\dfrac{hQ}{(R^2+h^2)^{3/2}}\cdot\left(1-\dfrac{\Delta\varphi}{2\pi}\right) = E_0\left(1-\dfrac{\Delta\varphi}{2\pi}\right)$. Здесь $E_0 = k\dfrac{hQ}{(R^2+h^2)^{3/2}}$ – обозначено поле полного кольца (*без выреза*) на его оси на высоте h.

Нескомпенсированный вклад в горизонтальную составляющую вносит только заряд ΔQ_φ дуги шириной $\Delta\varphi$, симметричной вырезу. По условию, $\Delta\varphi \ll 1$, поэтому заряд ΔQ_φ можно считать точечным, и составляющая поля

$$E_x = k\frac{\Delta Q_\varphi}{R^2+h^2}\sin\beta = k\frac{RQ}{\left(R^2+h^2\right)^{3/2}}\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = E_0\frac{R}{h}\cdot\frac{\Delta\varphi}{2\pi}.$$

Модуль вектора напряженности и угол наклона к оси z равны:

$$E = E_0\sqrt{\left(1-\frac{\Delta\varphi}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{R}{h}\cdot\frac{\Delta\varphi}{2\pi}\right)^2}, \qquad \gamma = \operatorname{arctg}\frac{E_x}{E_z} = \frac{R}{h}\cdot\frac{\Delta\varphi}{2\pi-\Delta\varphi}.$$

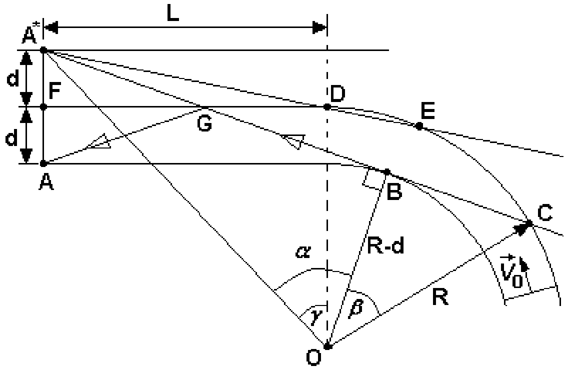
Используя условия задачи: $h = R,\ \Delta\varphi \ll 1$, получаем окончательно:

Ответ: $\vec{F} = q\vec{E}$, где $E = E_0\sqrt{1-\dfrac{\Delta\varphi}{\pi}+2\left(\dfrac{\Delta\varphi}{2\pi}\right)^2} \cong E_0\left(1-\dfrac{\Delta\varphi}{2\pi}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{16\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{Q}{R^2}\cdot\left(1-\dfrac{\Delta\varphi}{2\pi}\right),\ \ \gamma \cong \dfrac{\Delta\varphi}{2\pi}$.

Примечание: Если не считать угол $\Delta\varphi$ малым, то вертикальная составляющая остается такой же, а горизонтальная будет иметь вид (интегрируем вклад бесконечно малых элементов дуги $d\alpha$):

$E_x = \displaystyle\int_{-\Delta\varphi/2}^{\Delta\varphi/2} E_0\frac{R}{h}\frac{d\alpha}{2\pi}\cos\alpha = E_0\frac{R}{h}\cdot\frac{2\sin(\Delta\varphi/2)}{2\pi}$, что совпадает с полученным выше результатом при малом угле выреза.

5. Для построений используем закон отражения в плоском зеркале (кафельная стенка FD на рис). На рис. т.A^* - изображение человека в зеркале, прямая A^*C – касательная к окружности радиуса $R-d$ (B – точка касания). Предполагаем фары точечными, движущимися по соответствующим стенкам тоннеля.



Когда правая фара поезда достигнет точки C, человек увидит первый отблеск (луч CGA).

Время движения по закруглению равно:

$$t_1 = \frac{R_{ср}(\alpha+\beta-\gamma)}{V_0},$$

где $R_{ср} = R - d/2$ – средний радиус закругления.

Имеем:

$$\alpha = \arccos\frac{\mathrm{R-d}}{\sqrt{\mathrm{L}^2+(R+d)^2}} \approx 1.302\,рад,$$

$$\gamma = \mathrm{arctg}\frac{L}{R+d} \approx 1.240\ рад,\ \beta = \arccos\frac{R-d}{R} \approx 0.451\,рад,$$

$$\alpha+\beta-\gamma \approx 0.513\ рад \approx 29.4^\circ, \quad \text{и } t_1 = \frac{47.5\ м\cdot 0.513\ рад}{20\ м/с} \approx 1.2\ с.$$

Время равнозамедленного движения до остановки равно $t_2 = \frac{L}{V_{ср}} = \frac{2L}{V_0} = \frac{2\cdot 160\ м}{20\ м/с} = 16\ с$.

Ответ: $t = t_1 + t_2 \approx 17.2\ с$

Примечание:

а) Интересно отметить, что существует мертвая зона – участок ED траектории правой фары (конечно же, если считаем фару точечной). Человек не может видеть отражение правой фары от стенки, когда фара проходит этот участок. Отражение от стенки левой фары человек будет видеть с того момента, когда фара окажется в т.B.

б) конечно, можно было бы поупражняться в тригонометрических преобразованиях, чтобы получить выражение для, например, тангенса нужного нам угла. Но смысл? – к физике это отношения не имеет.