1. ("Широкий формат")

Обозначим: S – расстояние между предметом (слайдом) и экраном; a_1 и b_1 – расстояния от линзы объектива до предмета и его *четкого* изображения на экране соответственно; D_1 – оптическая сила линзы; Γ_1 – линейное увеличение, т.е. отношение линейных размеров изображения и предмета.

Тогда имеем:

$\begin{cases} a_1 + b_1 = S \\ b_1 / a_1 = \Gamma_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{1+\Gamma_1} S \\ b_1 = \dfrac{\Gamma_1}{1+\Gamma_1} S \end{cases}$, и оптическая сила объектива равна $D_1 = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{b_1} = \dfrac{1}{S}(2 + \Gamma_1 + 1/\Gamma_1)$.

Добавив тонкую линзу неизвестной оптической силы D, и считая, что полученный таким образом двухлинзовый объектив является также тонкой линзой (расстояние между линзами пренебрежимо мало) с оптической силой D_2, аналогично получаем: $D_2 = \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{b_2} = \dfrac{1}{S}(2 + \Gamma_2 + 1/\Gamma_2)$.

Поскольку оптическая сила составной линзы равна сумме оптических сил линз, получаем ответ:

$$D = D_2 - D_1 = \frac{1}{S}(\Gamma_2 + 1/\Gamma_2 - \Gamma_1 - 1/\Gamma_1).$$

В случае, когда изображение слайда заполняет весь экран, линейное увеличение равно $\Gamma_2 = \dfrac{1800\,\text{мм}}{24\,\text{мм}} = \dfrac{2700\,\text{мм}}{36\,\text{мм}} = 75$. Линейное увеличение в первом случае (изображение занимает *одну четвертую часть площади экрана*), естественно, в два раза меньше: $\Gamma_1 = \Gamma_2 / 2 = 37.5$.

А что можно сказать о расстоянии между слайдом и экраном S ? Можно лишь утверждать, что $S \approx L = 15\,\text{м}$, т.е. примерно равно *расстоянию от экрана до проектора*. Сам проектор имеет протяженность (по крайней мере его толщина, с учетом выдвинутого объектива, не меньше $a_1 \approx L/(1+\Gamma_1) \approx 40\,\text{см}$), а до какой точки проектора измерялось расстояние от экрана – нам не дано знать. Однако заметим, что все размеры и расстояния – это результаты приближенных измерений, округленные до 2-х цифр: так, например, значение L нам известно с точностью до 50 см. Посему, не продолжая рассуждать, возьмем в качестве приближения для S значение L (тем более что в ответе получается красивое число ☺) и проведем вычисление:

$$D = \frac{1}{S}(\Gamma_2 + 1/\Gamma_2 - \Gamma_1 - 1/\Gamma_1) = \frac{1}{15\,\text{м}}(75 + 1/75 - 37.5 - 1/37.5) \approx 2.5\,\text{дптр}$$

Ответ: $D \approx \dfrac{1}{L}(\Gamma_2 + 1/\Gamma_2 - \Gamma_1 - 1/\Gamma_1) = 2.5\,\text{дптр}$

Примечание: Возможно, дополнительные баллы можно заработать, если провести решение с учетом ошибок входных данных, разумных предположений о размерах проектора, в предположении, что составной объектив образует *толстую* линзу, дать в ответе диапазон значений оптической силы второй линзы. Дерзайте!

2. ("Старая тетрадь")

Попробуем вместе с профессором порассуждать над восстановлением координатных осей.
Чуть подумав, можно понять , что

- тепловой цикл изображен в координатах (V, P) (ось ординат – ось давления);
- при решении следует использовать информацию, которую нам предоставляет рисунок, а именно, что все точки цикла находятся в узлах сетки, и что можно сосчитать число клеточек по горизонтали и вертикали между точками цикла;
- участок 1-2 цикла – изобара, 2-3 – адиабата, а 3-1 – изотерма.

Далее, если обозначить через V_0 масштаб по оси объема, P_0 – масштаб по оси давления, то координаты точек цикла легко записываются:

$$(V_1, P_1) = (mV_0, nP_0); \quad (V_2, P_2) = ((m+3)V_0, nP_0); \quad (V_3, P_3) = ((m+12)V_0, (n-6)P_0)$$

Здесь <u>целые</u> числа m и n – это то, что нужно определить профессору.
Исходя из определения КПД тепловой машины, получаем:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1},$$

где A – полезная работа машины за цикл (равна площади цикла), Q_1 – тепло, *полученное* рабочим телом (газом) за цикл, Q_2 – тепло, *отданное* рабочим телом за цикл. При выводе использовалось также известное соотношение $A = Q_1 - Q_2$, следующее из первого закона термодинамики.
Газ получает тепло только на этапе изобарического расширения, поэтому

$$Q_1 = c_p \nu (T_2 - T_1) = \frac{c_p}{R} \nu R (T_2 - T_1) = \frac{c_p}{R}(P_2 V_2 - P_1 V_1) = \frac{c_p}{R} P_1 V_1 \left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right).$$

Здесь все обозначения – общепринятые, поэтому их не объясняем.
На этапе адиабатического расширения газ не обменивается теплом с окружающей средой, а при изотермическом сжатии газ отдает тепло, при этом внутренняя энергия газа сохраняется, и отданное тепло (по 1-му началу термодинамики) равно работе A'_{31} окружающей среды *над* газом, которая, в свою очередь, равна площади под изотермой.

$$Q_2 = A'_{31} = \int_{V_1}^{V_3} P\,dV = \int_{V_1}^{V_3} \frac{\nu R T_1}{V} dV = \nu R T_1 \ln \frac{V_3}{V_1} = P_1 V_1 \ln \frac{V_3}{V_1}.$$

Т.к. в условии задачи дано, что КПД $\eta = 1 - \frac{16}{15} \ln 2$, то получаем уравнение

$$\frac{16}{15} \ln 2 = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{R}{c_p} \frac{1}{(V_2 / V_1 - 1)} \ln \frac{V_3}{V_1},$$

из которого мы и должны получить ответ. Используя соотношения: $c_p = \frac{i+2}{2} R$ (здесь i – число степеней свободы молекул газа), $V_2 / V_1 = (m+3)/m$, а также представив отношение объемов V_3 и V_1 как $V_3 / V_1 = (m+12)/m = 2^k$ (k – новое неизвестное), получим систему двух уравнений относительно неизвестных m и k, в которую число степеней свободы i входит в качестве параметра:

$$\begin{cases} \dfrac{2mk}{3(i+2)} = \dfrac{16}{15} \\ \dfrac{m+12}{m} = 2^k \end{cases}.$$

Т.к. ищется решение, в котором m – *натуральное число*, то из 1-го уравнения следует, что k должно быть *рациональным положительным числом.* Анализируя 2-е уравнение, видим, что его левая часть – *рациональное* число, а правая часть может быть рациональным только при *натуральных* k (докажите это). Перебирая возможные значения параметра $i = \{3,5,6\}$, находим, что нужное нам решение существует только для *одноатомного* газа ($i = 3$): $\{k = 2, m = 4\}$.
Таким образом, мы нашли положение вертикальной оси, а для определения положения горизонтальной оси воспользуемся тем фактом, что точки 1 и 3 лежат на изотерме:
$P_1V_1 = P_3V_3 \Leftrightarrow nm = (n-6)(m+12) \Rightarrow n = 6 + m/2 = 8$ – также целое число!

Ответ: Мы **уверены**, что в старой школьной тетради центр координатной системы отстоял на **4** клетки влево и на **8** клеток вниз от точки 1, а рабочим телом цикла был **одноатомный** газ.

2. (“Старая тетрадь”) – Продолжение

У вас нет ощущения, что с этой задачей не все ясно? Например, возникает вопрос о переизбытке данных. Зачем дано значение КПД? Ведь положение осей должно однозначно восстанавливаться, исходя из связей между координатами точек цикла: точки 1 и 2 связаны уравнением изобары, точки 2 и 3 – уравнением адиабаты, а точки 3 и 1 – уравнением изотермы. Значит, КПД должно однозначно вычисляться после определения положения координатных осей. Не будем проходить этот путь, а просто найдем отношение $(P_2V_2^{\gamma})/(P_3V_3^{\gamma})$, используя полученное решение. Это отношение должно равняться единице (если, конечно, точки 2 и 3 принадлежат одной адиабате). Взяв показатель адиабаты для одноатомного газа $\gamma = c_p/c_v = 5/3$ (ведь именно для одноатомного газа мы нашли решение ранее), получаем: $\frac{8}{2}\left(\frac{7}{16}\right)^{5/3} \approx 1.01$.

Отношение не равно единице, хотя и достаточно близко к ней!
Как относиться к этому результату, показывающему некую некорректность задачи, предложенной Пете учителем, – судите сами.

Давайте рассмотрим эту же задачу, только в более общей постановке:

Цикл тепловой машины состоит из изобары, адиабаты и изотермы. Рабочим телом машины является идеальный газ.

Каково общее выражение для КПД цикла? Если КПД имеет вид $\eta = 1 - k\ln 2$*, то чему может быть равен коэффициент k? Могут ли все вершины цикла иметь целые (относительные) координаты?*

Из соотношений $P_1 = P_2,\ P_2V_2^{\gamma} = P_3V_3^{\gamma},\ P_3V_3 = P_1V_1,\ \gamma = c_p/c_v,\ c_p - c_v = R$ следует

$$\frac{P_1}{P_3} = \frac{V_3}{V_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{c_p}{R}}. \quad (1)$$

Далее: $Q_1 = \frac{c_p}{R}P_1V_1\left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right)$, $\quad Q_2 = P_1V_1\ln\frac{V_3}{V_1} = \frac{c_p}{R}P_1V_1\ln\frac{V_2}{V_1}$, и КПД цикла равно

$$\eta = 1 - \frac{1}{(V_2/V_1 - 1)}\ln\frac{V_2}{V_1}. \quad (2)$$

Видим, что КПД определяется только одним параметром – отношением объемов вершин, лежащих на изобаре. Кроме того, он не зависит от сорта молекул, т.е. от значения γ. Это – ответ на первый вопрос.

Представив $V_2/V_1 = 2^{\log_2(V_2/V_1)}$, получаем

$$\eta = 1 - \frac{\log_2(V_2/V_1)}{(V_2/V_1 - 1)}\ln 2, \qquad (3)$$

и значение коэффициента перед логарифмом равно

$$k = \frac{\log_2(V_2/V_1)}{(V_2/V_1 - 1)}. \qquad (4)$$

Коэффициент k, рассматриваемый как функция переменной $x = V_2/V_1$, монотонно убывает от $1/\ln 2 \approx 1.4427$ до нуля на интервале $(1;\infty)$, а КПД, соответственно, монотонно возрастает от 0 до 1.

Интересно теперь посмотреть, какие же координаты имеют точки 2 и 3, если $k = 16/15$ и точка 1 имеет координаты (4,8). Поскольку уравнение (4) не решается элементарно, решаем его численно с помощью компьютерной программы, например, используем пакет MATHEMATICA.

Отношение объемов равно $V_2/V_1 \approx 1.77952$, и другие координаты с точностью до трех значащих цифр равны: $V_2 \approx 7.12,\ V_3 \approx 16.9,\ P_3 = 1.89$. Видим, что точка 3 ближе к узлу сетки с координатами (17,2), чем к узлу (16,2).

Наконец, попытаемся описать все циклы, в которых вершины лежат в узлах сетки, при этом коэффициент при логарифме – рациональное число.

Если V_2/V_1 и k – рациональные, то $\log_2(V_2/V_1)$ должно быть также рациональным. Последнее возможно только при условии, что $V_2/V_1 = 2^p$, где p – натуральное. Из требования рациональности $V_3/V_1 = (V_2/V_1)^{\frac{c_p}{R}} = (V_2/V_1)^{\frac{i+2}{2}}$ следует, что для одноатомного ($i=3$) или двухатомного ($i=5$) газа степень p должна быть четным числом. Для других газов ($i=6$) p – любое натуральное.

В таблице 1 приведены целочисленные координаты вершин цикла и рациональный множитель k, как функции трех натуральных параметров m, n и p:

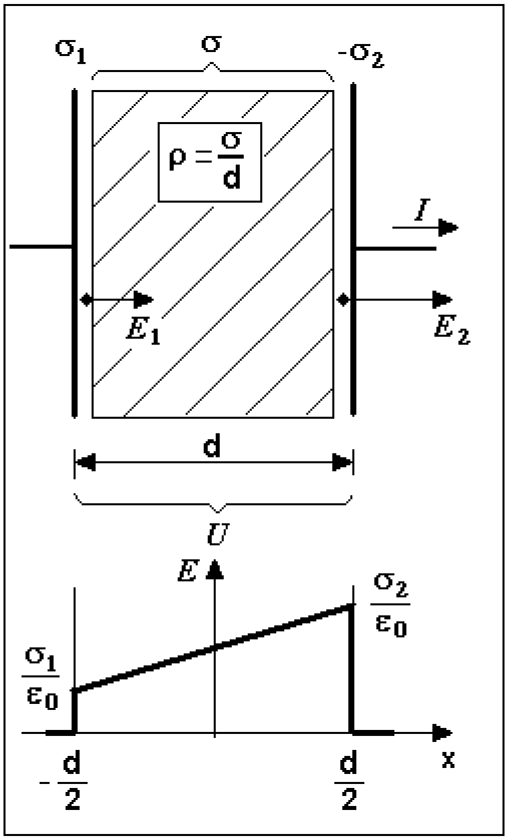
Таблица 1:

Число степеней свободы i	**Координаты вершин цикла**			**Коэффициент k** (формула 4)
	(V_1, P_1)	(V_2, P_2)	(V_3, P_3)	
3	$(m, 32^p n)$	$(4^p m, 32^p n)$	$(32^p m, n)$	$2p/(4^p - 1)$
5	$(m, 128^p n)$	$(4^p m, 128^p n)$	$(128^p m, n)$	$2p/(4^p - 1)$
6	$(m, 16^p n)$	$(2^p m, 16^p n)$	$(16^p m, n)$	$p/(2^p - 1)$

Послесловие.

Вот такая интересная задачка оказалась, за что следует поблагодарить учителя мальчика Пети.

3. (“Что там внутри?”)



При установившемся в цепи токе напряжение на конденсаторе равно $U = \mathrm{E} - IR$, а плотность тока в любом сечении пластины обязана быть одной и той же: $j = en\_v_{\partial p} = en\_\alpha(x)E(x) = const$. Отсюда следует: $\alpha(x)E(x) = const \Rightarrow E(x) = const \cdot \alpha^{-1}(x) \Rightarrow$ поле $E(x)$ линейно меняется между обкладками конденсатора. Линейность напряженности электрического поля может обеспечить только заряд пластины, распределенный равномерно по объему – докажите это. Обозначения введены на рисунке: σ_1 – поверхностная плотность заряда на положительной обкладке, $-\sigma_2$ – плотность заряда на отрицательной обкладке, ρ – объемная плотность заряда пластины. Также введено обозначение $\sigma = \rho d$ – количество заряда, приходящееся на единицу площади поверхности “толстой” пластины.

По закону сохранения заряда имеем:

$$\sigma_1 + \sigma - \sigma_2 = 0 \qquad (1)$$

Значение поля непосредственно у положительной обкладки равно $E_1 = \sigma_1 / \varepsilon_0$ (легко получить, используя, например, принцип суперпозиции полей), а у отрицательной – $E_2 = \sigma_2 / \varepsilon_0$. Напряжение на конденсаторе равно площади под графиком напряженности поля:

$$U = \bar{E}d = \frac{E_1 + E_2}{2} d = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0} d, \qquad (2)$$

Кроме того, в условии дано, что значения обратной проводимости на краях пластины отличаются в 2 раза. Отсюда следует, что и значения полей на краях пластины отличаются в два раза:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = n, \qquad (3)$$

где $n = 2$ либо 1/2.

Решая систему уравнений (1)–(3), найдем поверхностную плотность заряда на толстой пластине, а затем и искомый заряд на пластине:

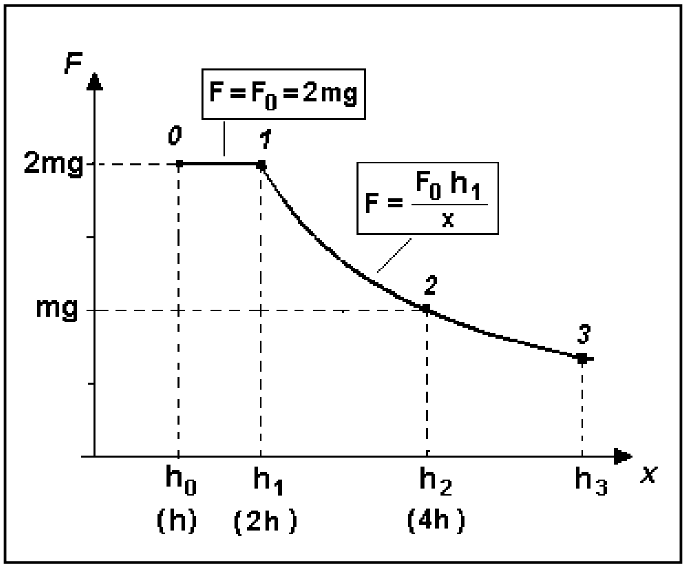
$$Q = \sigma S = \frac{2(n-1)}{(n+1)} \frac{\varepsilon_0 S}{d} U = \frac{2(n-1)}{(n+1)} CU = \pm \frac{2}{3} CU$$

В ответе знак “+” соответствует $n = 2$, а знак “–“ значению $n = 1/2$.

Ответ: $Q = \dfrac{2(n-1)}{(n+1)} CU = \pm \dfrac{2}{3} CU$, где $U = \mathrm{E} - IR$, $n = \{2; 1/2\}$.

4. (“Вертикальный предел”)
Полагаем, что опыт проводился при комнатной (или чуть выше) температуре (см. приложение). Тогда плотность водяного пара исчезающе мала по сравнению с плотностью воды, и можно пренебречь начальным объемом воды. Кроме того, с достаточной точностью можно считать, что пар является идеальным газом.
Дополнительно полагаем:

- внешнее давление равно нулю, т.е. над поршнем находится глубокий вакуум;
- процесс расширения водяного пара достаточно медленный, т.е. квазистатический.



В начале опыта насыщенный пар занимает цилиндр высоты $h_0 = h$. Если m – масса поршня, то сила давления насыщенного пара на поршень в этот момент равна $F_0 = 2mg$ (см. рисунок). После снятия груза поршень начнет движение вверх с ускорением g. Поскольку под поршнем находится только пар (причем насыщенный), есть все условия для возникновения кипения воды, так что пар будет оставаться насыщенным вплоть до полного выкипания воды. Сила давления пара на поршень будет оставаться постоянной, и поршень будет двигаться равноускоренно (участок 0-1 на графике). В момент полного испарения поршень будет находиться на высоте $h_1 = 2h$, поскольку масса воды равна массе пара в начальный момент. Пройденный путь на участке 0-1 равен $h = 20$ см, время движения $t_1 = \sqrt{2h/g} \approx 0.2$ с, набранная скорость $v_1 = \sqrt{2gh} \approx 2$ м/с. М-м-м-да, короткий промежуток времени, кипение должно быть бурным.
Затем начнется изотермическое расширение пара: сила давления пара на поршень будет уменьшаться по гиперболическому закону, и в момент, когда она сравняется с силой тяжести поршня ($F_2 = mg = F_0/2$), поршень окажется на высоте $h_2 = 4h$, а скорость достигнет своего максимального значения, которое и надо найти.
В дальнейшем поршень замедляется до полной остановки (точка 3 с координатой h_3).
Затем процесс движения поршня происходит в обратном направлении – поршень будет совершать ангармонические колебания относительно положения равновесия $x_0 = h_2$ двигаясь в пределах $x_{\min} = h$ и $x_{\max} = h_3$.
Все теперь понятно, приступим к оформлению решения.
Максимальную скорость $v_{\max} = v_2$ найдем, используя теорему об изменении механической энергии поршня:

$$\frac{mv_2^2}{2} + mg(h_2 - h) = A_{0-2} , \qquad (1)$$

здесь A_{0-2} – работа пара над поршнем, которая равна площади под графиком $F(x)$ на участке 0-2.
Работа на участке 0-2 равна :

$$A_{0-2} = \int_{h_0}^{h_2} F(x)\,dx = F_0(h_1 - h) + \int_{h_1}^{h_2} \frac{F_0 \cdot h_1}{x}\,dx = 2mgh\left(1 + 2\ln 2\right) . \qquad (2)$$

С учетом (2) из (1) получаем максимальную скорость поршня:

$$v_{\max} = v_2 = \sqrt{2gh(4\ln 2 - 1)} \qquad (3)$$

Наконец найдем максимальную высоту подъема поршня, также используя энергетические соображения. Имеем:

$$mg(h_3 - h) = A_{0-3} = 2mgh\left(1 + 2\ln\frac{h_3}{2h}\right) \Leftrightarrow \frac{h_3}{h} - 4\ln\frac{1}{2}\frac{h_3}{h} - 3 = 0 \ . \qquad (4)$$

Получается уравнение относительно неизвестного h_3 / h, которое, к сожалению, решается только численно. Его решение – $h_3 \cong 9.0h$.

Ответ: Максимальная скорость равна : $v_{\max} = \sqrt{2gh(4\ln 2 - 1)} \approx 2.6$ м/с. Она достигается, когда поршень будет находиться на высоте $h_2 = 4h = 80$ см над дном сосуда. Поршень будет совершать ангармонические колебания в пределах $h_{\min} = h = 20$ см и $h_{\max} \cong 9h = 180$ см относительно положения равновесия $h_2 = 4h = 80$ см.

Приложение к задаче 4.

Здесь мы попытались дать обоснование допущениям, сформулированным в начале решения.
В термодинамике существует понятие *критическая точка* , – это сочетание значений температуры T_c и давления P_c (или, что эквивалентно, молярного объёма V_c), при которых исчезает различие в свойствах жидкой и газообразной фаз вещества. Для воды $T_c = 647.1\,\text{К}$, $P_c = 22.1\,\text{МПа}$, $V_c = 55.9\,\text{см}^3/\text{моль}$. При приближении к критической точке плотности воды и ее насыщенного пара стремятся к одному и тому же значению – критической плотности $\rho_c = 322$ кг/м^3. Ясно, что в области высоких температур пар достаточно плотный, и он не должен подчиняться уравнению состояния идеального газа.
Нашел в интернете хорошую статью www.iapws.org/relguide/supsat.pdf . В статье приведены зависимости от температуры различных параметров воды и ее насыщенного пара. Запрограммировал эти зависимости и построил графики.

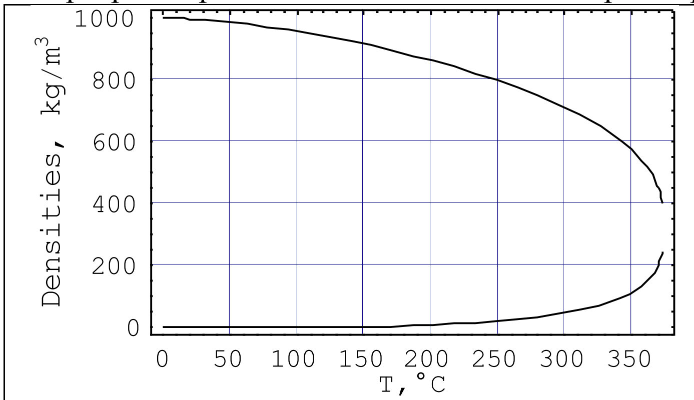


Рис.4.2а: Зависимости плотностей воды и ее насыщенного пара от температуры.

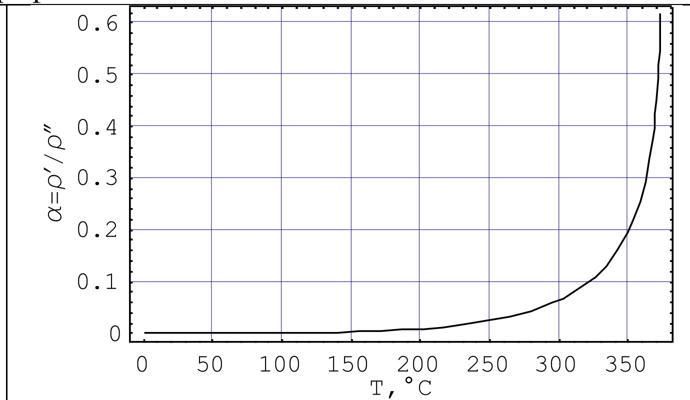


Рис.4.2б: Зависимость отношения плотности насыщенного пара к плотности воды.

Из графика 4.2б видно, что отношение плотностей исчезающе мало при обычных температурах (даже $\alpha(200^\circ\text{C}) = 0.01$), и резко растет при приближении к критической температуре.

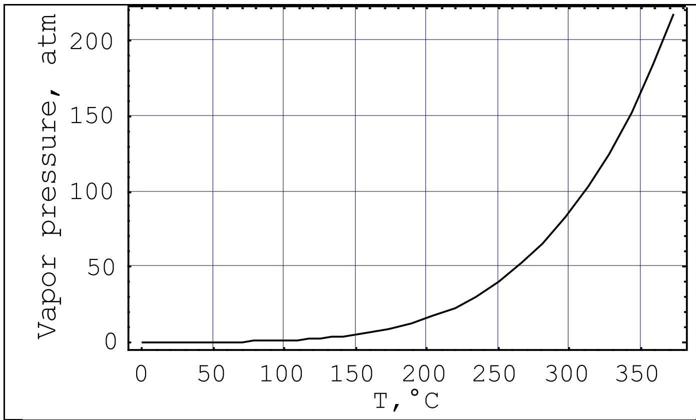


Рис.4.3: Зависимость давления насыщенного пара от температуры.

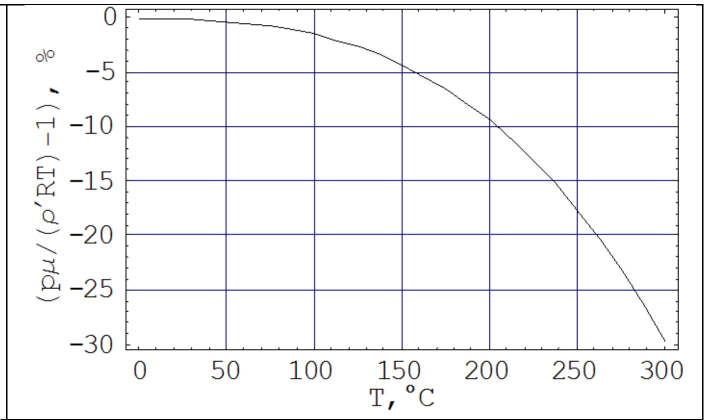


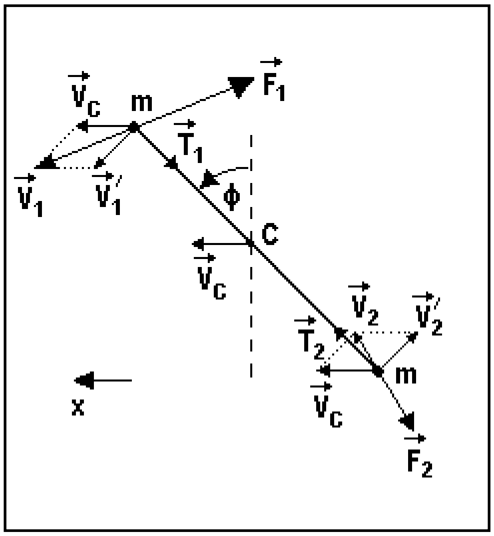
Рис.4.4: Демонстрация отклонения от закона идеального газа.

На рис. 4.3 построена зависимость давления насыщенного пара P' от температуры. Видно, что давление резко растет с повышением температуры: P' (46ºC) = 0.1 атм, P' (100ºC) = 1 атм, P' (200ºC) = 16 атм, P' (300ºC) = 86 атм. Если насыщенный пар подчиняется закону состояния идеального газа, то отношение $\frac{P'\mu}{\rho' RT}$ должно быть равно единице. На рис. 4.4 построена функция $(\frac{P'\mu}{\rho' RT} - 1)\cdot 100\%$, по которой можно судить о степени отклонения пара от идеального газа. Из графика можно заключить, что насыщенный пар подчиняется закону идеального газа с точностью 1% при 80ºC, 4% при 150ºC и 9% при 200ºC. Т.о. делаем вывод, что мы можем в нашей задаче использовать уравнение изотермы идеального газа вплоть до 200ºC.

Однако зададим себе вопрос: каковы должны быть размеры поршня, чтобы он своим весом создавал необходимое давление? Если цилиндрический поршень изготовлен из обычного материала, например стали (плотность 7.8 г/см^3), то при давлении пара в 1 атм (100ºC) необходим цилиндр высотой 1.28 м, а при 16 атм (200ºC) – высотой 20.5 м, что соответствует высоте 6-этажного дома! Трудно представить опыт с таким поршнем. Скорее всего в лабораторных условиях использовался поршень высотой порядка 10 см, что соответствует давлению паров порядка 0.1 атм, и следовательно, температуре опыта – порядка 45 градусов Цельсия.

Таким образом заключаем, что опыт проводился при температуре, не превышающей 100ºC (а скорее всего при комнатной, или чуть выше, чтобы не создавать слишком глубокий вакуум над поршнем); пар можно считать идеальным газом; плотность пара исчезающе мала по сравнению с плотностью воды.

5. (“ Большое космическое путешествие“)



Положение гантели в произвольный момент движения, силы, действующие на шарики, отсчет угла поворота, скорости в лабораторной СО и в подвижной СО центра масс (ц.м.) изображены на рисунке.

Движение гантели – это плоское движение твердого тела, которое можно представить в виде суммы двух простых движений: поступательного движения с центром масс (точка *C* на рис.) и вращательного движения относительно оси, проходящей через ц.м. и перпендикулярной плоскости движения (совпадает с плоскостью рисунка).

Как решать эту задачу – практически очевидно. Записываем два закона движения: теорему о движении центра масс и основной закон вращательного движения. Совместное решение этих двух уравнений и дает ответ задачи.

Поскольку основной закон вращательного движения выходит за рамки школьной программы, а теорему о движении центра масс знают ученики физмат классов и учащиеся различных заочных школ (например, ЗФТШ), подойдем к решению задачи, используя азы школьной механики.

Считаем, что отсутствует вращение звездолета относительно его центра масс, тогда лабораторная СО, связанная со стенками звездолета, является инерциальной, и движение каждого шарика подчиняется 2-му закону Ньютона:

$$m\frac{d\vec{V}_1}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{T}_1 \tag{1}$$

$$m\frac{d\vec{V}_2}{dt} = \vec{F}_2 + \vec{T}_2 \tag{2}$$

Также считаем, что подвижная СО, связанная с ц.м. гантели, движется *поступательно*. Т.к. стержень жесткий и массы шариков равны, то ц.м. гантели находится в середине стержня (точка С на рисунке), и в подвижной СО шарики совершают чисто вращательное движение по окружности радиуса $r = l/2$ с одинаковыми по величине, но противоположными по направлению скоростями, т.е. в любой момент времени выполняется соотношение

$$\vec{V}_1' + \vec{V}_2' = 0\,. \tag{3}$$

Кроме того, вектора относительных скоростей перпендикулярны стержню.

Поскольку стержень невесомый, силы упругости, действующие со стороны стержня на шарики, направлены вдоль стержня и удовлетворяют соотношению

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0\,. \tag{4}$$

Поскольку шарики одинаковы (геометрически), коэффициент пропорциональности α в выражении для силы сопротивления один и тот же, т.е. для этих сил имеем формулы

$$\vec{F}_1 = -\alpha\vec{V}_1, \quad \vec{F}_2 = -\alpha\vec{V}_2\,. \tag{5}$$

Наконец, для скоростей в лабораторной и подвижной системах отсчета справедливы соотношения

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_C + \vec{V}_1', \quad \vec{V}_2 = \vec{V}_C + \vec{V}_2'\,. \tag{6}$$

С использованием (5) и (6) уравнения движения (1) и (2) принимают вид:

$$m\frac{d\vec{V}_C}{dt}+m\frac{d\vec{V}_1'}{dt}=-\alpha\vec{V}_C-\alpha\vec{V}_1'+\vec{T}_1 \qquad (1^*)$$

$$m\frac{d\vec{V}_C}{dt}+m\frac{d\vec{V}_2'}{dt}=-\alpha\vec{V}_C-\alpha\vec{V}_2'+\vec{T}_2 \qquad (2^*)$$

Складывая последние уравнения, с учетом (3) и (4) получаем закон движения центра масс гантели

$$m\frac{d\vec{V}_C}{dt}=-\alpha\vec{V}_C\,. \qquad (7)$$

Уравнение (7) говорит нам о том, что в любой момент времени вектор ускорения направлен *против* вектора скорости, а это означает, что траектория центра масс – *прямая* линия, которая, естественно, задается направлением начальной скорости центра масс $\vec{V}_C(0)=\vec{V}_{C0}$. Проектируя (7) на ось X, направленной по скорости центра масс (см. рис), имеем:

$$m\frac{dV_{Cx}}{dt}=-\alpha V_{Cx}\,, \qquad (7^*)$$

из которого следует соотношение

$$mdV_{Cx}=-\alpha V_{Cx}dt \Rightarrow m\,dV_{Cx}=-\alpha\, dx_C \Rightarrow m\Delta V_{Cx}=-\alpha\Delta x_C\,.$$

Для изменений скорости и перемещения центра масс за все время движения имеем: $\Delta V_{Cx}=-V_{C0}$, $\Delta x_C=(L/2-a)$, и окончательный результат запишется в виде

$$mV_{C0}=\alpha(L/2-a)\,. \qquad (8)$$

Теперь перейдем к вращательному движению гантели в системе отсчета центра масс. Вычитая из уравнения (1) уравнение (2), с учетом (3) и (4) получим уравнение движения 1-го шарика:

$$m\frac{d\vec{V}_1'}{dt}=-\alpha\vec{V}_1'+\vec{T}_1\,, \qquad (9)$$

которое эквивалентно двум скалярным уравнениям – проекциям на тангенциаль $\vec{\tau}$ и нормаль $\vec{n}$ сопутствующей системы координат:

$$\begin{cases} m\dfrac{dV_{1\tau}'}{dt}=-\alpha V_{1\tau}' \\ m\dfrac{V_{1\tau}'^2}{r}=T_1 \end{cases}. \qquad (9^*)$$

Первое уравнение (9*) с точностью до обозначения скоростей совпадает с уравнением (7*), а значит, имеет точно такое же решение:

$$m\Delta V_{1\tau}'=-\alpha\Delta s\,,$$

где Δs – приращение естественной координаты s при движении точки по окружности (фактически – пройденный путь каждого шарика в СО центра масс). Поскольку начальная скорость нижнего шарика равна нулю, то начальная скорость верхнего (1-го) шарика равна $\vec{V}_{10}=2\vec{V}_{C0}$, и значит $V_{1\tau0}'=V_{C0}$. Поэтому за все время движения имеем соотношение

$$mV_{C0}=\alpha S\,. \qquad (10)$$

Здесь S – путь, пройденный каждым из шариков до остановки при вращательном движении вокруг центра масс. Сравнивая (10) и (8), получаем:

$$S=\Delta x_C=L/2-a\,. \qquad (11)$$

Число оборотов, совершенных 1-м (первоначально верхним) шариком до остановки, очевидно, равно

$$N = \frac{S}{2\pi r} = \frac{S}{\pi l} = \frac{L/2 - a}{\pi l} \approx 100.2676,$$

что соответствует углу поворота спицы за все время движения на $\Delta\phi = \frac{S}{r} = \frac{2S}{l} = \frac{L-2a}{l} = 630$ рад.

Через 100.25 оборотов спица будет занимать горизонтальное положение (1-ый шарик окажется впереди), а за оставшиеся 0.0176 оборота повернется еще на угол $0.0176 \cdot 360^\circ \approx 6.34^\circ$.

Ответ: После остановки угол между стержнем гантели и полом составляет 6.34º.

Дополнение к задаче 5

Для тех, кто понимает, запишем основные уравнения плоского движения гантели без объяснений:
Теорема о движении центра масс:

$$(2m)\frac{d\vec{V}_C}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -2\alpha \vec{V}_C \ . \qquad \text{(Д1)}$$

Основное уравнение вращательного движения:

$$J\frac{d\omega}{dt} = M_{F_1} + M_{F_2} = -2\alpha\omega r^2 . \qquad \text{(Д2)}$$

Здесь $J = 2mr^2$ – момент инерции гантели относительно центра масс, ω – угловая скорость, $r = l/2$ – радиус окружности.
Уравнения (Д1) и (Д2) дополняются начальными условиями:

$$\vec{V}_C(0) = \vec{V}_{C0},\ \vec{r}_C(0) = \vec{r}_{C0},\ \omega(0) = \omega_0 = V_{C0}/r . \qquad \text{(Д3)}$$